学校编号: 10384　　　　分类号 ________ 密级 ________
学　　号: 20051301583　　　　UDC ________

硕　士　学　位　论　文

沿多项式曲线的粗糙核奇异积分算子

Rough Singular Integral Operators Along Polynomial Curves

马 丽

指导教师姓名: 伍 火 熊 教授
专 业 名 称: 基 础 数 学
论文提交日期: 2008 年 4 月
论文答辩日期: 2008 年 6 月
学位授予日期: 2008 年 6 月

答辩委员会主席: ________
评　　阅　　人: ________

2008 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　　），在　　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　日期：　　　年　月　日

目　　录

Contents

沿多项式曲线的粗糙核奇异积分积分算子

中文摘要

本学位论文主要研究沿多项式曲线的粗糙核奇异积分算子在 Lebesgue 空间的有界性问题. 全文共分两章, 第一章致力于研究沿多项式曲线的单参数奇异积分算子, 第二章研究沿多项式曲线的多参数奇异积分算子. 在积分核满足径向粗糙性的条件下, 引入了一类相当弱的球面尺寸条件, 利用精细的 Fourier 变换估计和 Littlewood-Paley 理论, 建立了这些算子在 L^p 空间中的有界性, 改进和推广了已有的结果.

关键词. 奇异积分, 多项式曲线, 粗糙核, 极大算子, 乘积空间, Littlewood-Paley 理论, Fourier 变换估计.

ROUGH SINGULAR INTEGRAL OPERATORS ALONG POLYNOMIAL CURVES

ABSTRACT

This desertation is devoted to studying rough singular integral operators associated to polynomial curves. It consists of two chapters. The firt chapter is concerning with the one-parameter singular integrals and the second one deals with the multiple-parameter singular integrals. Some rather weak size conditions both along the radial direction and on sperical surface, which imply the L^p boundedness of these singular integral operators for some fixed p$(1 < p < \infty)$, are obtained.

Keywords. singular integrals, polynomial curves, maximal operator, product domain, rough kernel, Littlewood-Paley theory, Fourier transform estimate.

第 0 章 序言与论文主要结果

§ 0.1 序言

自上世纪 50 年代 Calderón-Zygmund 建立奇异积分算子理论以来，它的发展已历经三代，第一代为主值卷积奇异积分，作为经典 Hilbert 变换在高维的推广是 Calderón-Zygmund 为研究常系数椭圆型偏微分方程提出并进行研究的；第二代为经典伪微分算子，已不再是卷积算子，为处理十分正则的变系数椭圆型偏微分方程而创立的；第三代为标准 (或称为广义)Calderón-Zygmund 算子，主要为研究 Lipschitz 开集上用双层位势法解 Dirichlet 或 Neumann 问题而提出 (可参见 [17]). 由于其在偏微分方程及相关领域的深刻应用背景，关于这些算子的研究一直是现代调和分析的重要课题，并已取得十分丰富的成果.

在此我们主要关注卷积奇异积分算子的研究. 定义奇异积分算子：

$$Sf(x) = p.v\int_{\mathbb{R}^n} \Omega(y')|y|^{-n} f(x-y)dy,$$

其中 $\mathbb{R}^n$ 为 n $(n \geq 2)$ 维 Eculid 空间， S^{n-1} 为 $\mathbb{R}^n$ 上的单位球面， Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的零次齐次函数且满足：

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(y')d\sigma(y') = 0. \tag{0.1.1}$$

假设 $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}dx$ 是 f 的 Fourier 变换，其中 $\langle , \rangle$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的内积. 我们已知

$$(Sf)\hat{}(\xi) = m(\xi')\hat{f}(\xi),$$

其中

$$m(\xi') = -\int_{S^{n+1}} \Omega(\theta)[i\frac{\pi}{2}sgn(\langle\xi',\theta\rangle) + \log|\langle\xi',\theta\rangle|]d\sigma(\theta).$$

利用 Sf 的 Fourier 变换表达式知，当

$$\sup_{\xi'\in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log(|\langle\xi',\theta\rangle|^{-1})d\sigma(\theta) < \infty, \tag{0.1.2}$$

时， S 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

根据 Young 不等式， (0.1.2) 式可由条件 $\Omega \in L\log L(S^{n-1})$ 得到，其中 $L\log L(S^{n-1})$ 表示满足如下条件的 Zygmund 函数类:

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log(2 + |\Omega(\theta)|)d\sigma(\theta) < \infty.$$

若 $\Omega \in L\log L(S^{n-1})$, 运用 Calderón-Zymund 旋转方法可以证明 S 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的 (见文 [3]) 其中 $p \in (1, \infty)$. 一个自然的问题是条件 (0.1.2) 是否能保证算子 S 的 L^p $(p \neq 2)$ 有界性？在文 [16] 中， Grafakos-Stefanov 考虑了以下稍强条件:

$$\sup_{\xi'\in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)|(\log(|\langle\xi',\theta\rangle|^{-1}))^{\beta}d\sigma(\theta) < \infty, \tag{0.1.3}$$

其中 $\beta > 1$, 并在此条件下建立了 S 的 L^p 有界性，其中 p 的取值范围依赖于 β. 随后文 [12] 将其推广到如下沿多项式曲线的更一般算子:

$$T_{P,b}f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} b(|y|)\Omega(y')|y|^{-n}f(x - P_N(|y|)y')dy, \tag{0.1.4}$$

其中 $P_N(u) = \sum_{i=0}^{N} a_i u^i$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 N 阶实值多项式且满足 $P_N(0) = 0$, b 为 $\mathbb{R}^+$ 上的可测函数. 当 $b \equiv 1$ 时，记 $T_{P,b}$ 为 T_P. 在 [12] 中，范大山等建立了如下结果:

定理 A 假设 Ω 满足 (0.1.3), 那么 T_P 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 其中 $p \in (\frac{2\beta}{2\beta-1}, 2\beta)$.

一个自然的问题是定理 A 对更一般的算子 $T_{P,b}$ 是否也成立？本文第一章将探讨这一问题。

另一方面, 如果 $\mathbb{R}^n$ 中的单参数伸缩变换 $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_n)$ 换为一般的多参数伸缩 $\delta x = (\delta_1 x_1, \delta_2 x_2, \cdots, \delta_n x_n)$, 其中 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$, 我们需要考虑乘积空间 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $m, n \geq 2$. 相应于上述卷积奇异积分算子 S, Fefferman 和 Stein[14, 15] 首先研究了 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上的如下多参数奇异积分算子:

$$T_h f(x,y) = \text{p.v.} \int\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} \frac{\Omega(u', v')}{|u|^m |v|^n} h(|u|, |v|) f(x-u, y-v)\, du dv.$$

其中 $\Omega(u', v') \in L^1(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 满足 $\Omega(\lambda x, \rho y) = \Omega(x, y)$ ($\forall\, \lambda,\ \rho > 0$) 和

$$\int_{S^{m-1}} \Omega(u', v') d\sigma(u') = \int_{S^{n-1}} \Omega(u', v') d\sigma(v') = 0. \qquad (0.1.5)$$

众所周知, Fefferman 和 Stein [14, 15] 首先研究了这类算子, 在 Ω 满足一定正则性条件下证明了 T 的 L^p 有界性, $1 < p < \infty$. 随后, Duoandikoetxea [8] 在 $\Omega \in L^q(S^{m-1} \times S^{n-1})$ $(q > 1)$, 及 $h \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ 的条件下, 获得了 T_h 的 L^p $(1 < p < \infty)$ 有界性. 后来, 许多作者对这一结果进行了改进 (见 [1, 2, 5, 7, 12, 22, 23, 24] et al.). 特别地, Al-Salman, Al-Qassem 和 Pan [1] 证明了只要 $\Omega \in L(\log L)^2(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 以及 $h \in \triangle_\gamma$, $\gamma > 1$, $|1/p - 1/2| < \min\{1/2, 1/\gamma'\}$, 那么 T_h 是 L^p 有界 (对于 $h \equiv 1$ 的情形见 [5]). Ying [24], Wu 和 Yang [23] 证明了如果对 $\alpha > 1$, Ω 满足下面条件:

$$\sup_{\xi' \in S^{m-1},\, \eta' \in S^{n-1}} \int\int_{S^{m-1} \times S^{n-1}} |\Omega(\theta, \omega)| \left(\log \frac{1}{|\xi' \cdot \theta|} \log \frac{1}{|\eta' \cdot \omega|} \right)^\alpha d\sigma(\theta) d\sigma(\omega) < \infty, \qquad (0.1.6)$$

那么 T 是 $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 有界（ $1 + 1/(2\alpha - 1) < p < 2\alpha$).

我们指出条件 (0.1.6) 在单参数情形即为 (0.1.3), 它首先由 Walsh 在 [19] 引入, 随后 Grafakos 和 Stefanov 在 [16] 中作了进一步研究. 为了简单起见, 我们记 $\alpha > 0$,

$$G_\alpha(S^{m-1} \times S^{n-1}) = \{\Omega \in L^1(S^{m-1} \times S^{n-1}) : \ \Omega \ \text{满足} \ (0.1.4)\}.$$

借助 [16] 的思想, 容易得出 $L(\log^+ L)^2(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 和 $G_\alpha(S^{m-1} \times S^{n-1})(\alpha > 1)$ 互不包含, 且 $\cup_{q>1} L^q(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 是 $G_\alpha(S^{m-1} \times S^{n-1})$ $(\alpha > 0)$ 的一个真子集, 也是 $L((\log^+ L)^2 (S^{m-1} \times S^{n-1})$ 的真子集.

比较上述结果, 人们自然会问: 算子 T_h 在条件 $\Omega \in G_\alpha(S^{m-1} \times S^{n-1})$, $h \in \triangle_\gamma(\gamma > 1)$ 下的 L^p 有界性如何?

在本文第二章, 我们将探讨这一问题. 我们将引入 Ω 的一个新的尺寸条件, 并证明在 $m = n = 2$ 的情形下, 此条件比 $\Omega \in G_\alpha(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 条件更弱, 而且我们的方法适用于处理沿多项式曲线的更一般算子.

§ 0.2 论文主要结果

本文的主要研究对象为沿多项式曲线的粗糙核奇异积分算子, 包括单参数变量和多参数变量两种类型. 全文共分两章, 其编排格式如下: 定理和命题按章编排, 如定理 1.2 指第一章的第二个定理; 引理、公式、推论和注记的编号以章节划分, 如引理 1.2.3 指第一章第二节的第三个引理.

第一章主要讨论沿多项式曲线的单参数奇异积分算子的 L^p 有界性.

设 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, 是 n 维 Eculid 空间, S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, 其上赋以 Lebesgue 测度 $d\sigma = d\sigma(\cdot)$. 对非零点 $x \in \mathbb{R}^n$, 记 $x' = x/|x|$. 对

$m \geq 2$, $n \geq 2$, 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的零次齐次函数且满足 (0.1.1)

我们将考虑 $b \in \Delta_s(s>1)$, 其中 Δ_s 表示定义在 $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ 上且满足下列条件的可测函数全体:

$$\|b\|_{\Delta_s} = \sup_{u>0}(u^{-1}\int_0^u |b(t)|^s dt)^{\frac{1}{s}} < \infty.$$

为给出我们的定理, 我们还需要引入一些记号. 设 φ 是定义在 $(0,\infty)$ 的非负连续函数, 且满足

(1) φ 是递增的;

(2) $\frac{\varphi(s)}{s}$ 是递减的;

(3) $\varphi(st) \leq c(\phi(s)+\phi(t))$;

(4) $\varphi(2s) \leq c \cdot \varphi(s)$.

φ 的一个明显例子是函数 $(\log(a+t))^\beta(\beta>0,\ a\geq 2)$, a 可能与 β 有关. 定义一个新函数 ψ:

$$\psi(t) = \sup_{s>0}\frac{\min(1,st)}{\varphi(s)} = \frac{1}{\varphi(\frac{1}{t})}, \tag{0.2.1}$$

其中最后一个等式可由 φ 的性质 (1) 和 (2) 得到. 我们考虑以下两个关于 Ω 的条件:

$$\sup_{\xi\in S^{n-1}}\int_{S^{n-1}}|\Omega(\theta)|\varphi(|\langle\theta,\xi\rangle|^{-1})d\sigma(\theta) < \infty, \tag{0.2.2}$$

$$\sup_{\xi\in S^{n-1}}\int\int_{S^{n-1}\times S^{n-1}}|\Omega(\theta)\Omega(\omega)|\varphi(\langle\theta-\omega,\xi\rangle|^{-1})d\sigma(\theta)d\sigma(\omega) < \infty. \tag{0.2.3}$$

容易看出，当 $\Omega \in L^1(S^{n-1})$, $\varphi(t) = (\log(a+t))^\beta$ 时条件 (0.1.3) 与条件 (0.2.2) 是等价的. 我们的主要结果如下：

定理 1.1 假设 $0 < \alpha < 1/2, 2/(1-2\alpha) < s$. 若 $b \in \Delta_s, \sum_{j\geq 1}(\varphi(2^j)^{-\alpha}) < \infty$, Ω 满足 (0.2.3). 那么 $T_{P,b}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的，其中 $p \in (2/(2-s'\alpha), 2/s'\alpha)$.

定理 1.2 假设 $s \in (1,2)$, $0 < \alpha < 1/s'$, 其中 $s' = s/s-1$. 若 $\sum_{j\geq 1}(\varphi(2^j))^{-\alpha} < \infty$, $b \in \Delta s$, Ω 满足 (0.2.3). 那么 $T_{P,b}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的，其中 $p \in (2s/((3-2\alpha)s-2), 2s/((3-2\alpha)s-2))$.

由文 [11] 的 Lemma 1 知，当 $n=2$, 由条件 (0.2.2) 可推出条件 (0.2.3). 因此，在定理 1.1 和定理 1.2 中取 $\varphi(t) = (\log(a+t))^\beta$, 我们可以得到如下两个定理.

定理 1.3 假设 $n=2$, $\beta > 2$, $2\beta/(\beta-2) < s$. 若 $b \in \Delta_s$, Ω 满足 (0.1.1) 和 (0.1.3). 那么 $T_{P,b}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的，其中 $p \in (2\beta/(2\beta-s'), 2\beta/s')$.

定理 1.4 假设 $n=2$, $s \in (1,2)$, $0 < \alpha < 1/s'$, 其中 $s' = s/s-1$. 若 $b \in \Delta s$, Ω 满足 (0.1.1) 和 (0.1.3). 那么 $T_{P,b}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的，其中 $p \in (2s\beta/((3\beta-2)s-2\beta), 2s\beta/((2-\beta)s+2\beta))$.

第二章讨论沿多项式曲线的多参数奇异积分算子的 L^p 有界性.

设 $\mathbb{R}^N (N = m$ 或 $n \geq 2)$, S^{N-1} 和 Ω 如前所述. 设 $P_{N_1}(u) = \sum_{l=1}^{N_1} a_l u^l$, $P_{N_2}(v) = \sum_{l=1}^{N_2} b_l v^l$ 是 $\mathbb{R}$ 上的两个实多项式且满足 $P_{N_1}(0) = P_{N_2}(0) = 0$. 对于任意 $f \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, 乘积域 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上沿“多项式曲

线” (P_{N_1}, P_{N_2}) 的奇异积分算子 $T_{h,P}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}&T_{h,P}(f)(x_1, x_2)\\&\quad= \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} h(|y_1|,|y_2|)\frac{\Omega(y_1', y_2')}{|y_1|^m|y_2|^n} f(x_1 - P_{N_1}(|y_1|)y_1', x_2 - P_{N_2}(|y_2|)y_2')dy_1dy_2,\end{aligned}$$

其中 $h\in\Delta_\gamma$, $\gamma>1$, Δ_γ 表示定义在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ = \{(t,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ t,\,r\geq 0\}$ 上且满足下列条件的可测函数全体：

$$\| h \|_{\Delta_\gamma} = \sup_{R_1>0,\, R_{2>0}} \left(R_1^{-1}R_2^{-1}\int_0^{R_1}\int_0^{R_2} |h(r,t)|^\gamma\, dr\, dt\right)^{1/\gamma} < \infty. \tag{0.2.4}$$

设 φ_i, $(i=1,\,2)$ 是定义在 $(0,\,\infty)$ 上的两个非负连续函数且满足前述函数 φ 的性质 (1)–(4).

引入关于 Ω 的两个尺寸条件：

$$\begin{aligned}&\sup_{\xi'\in S^{m-1},\,\eta'\in S^{n-1}}\iint_{S^{m-1}\times S^{n-1}} |\Omega(u',v')|\varphi_1(|\langle u',\xi'\rangle|^{-1})\\&\qquad\times\varphi_2(|\langle v',\eta'\rangle|^{-1})d\sigma(u')d\sigma(v')<\infty,\end{aligned}\tag{0.2.5}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\xi'\in S^{m-1},\,\eta'\in S^{n-1}}\int\int_{(S^{m-1}\times S^{n-1})^2} |\Omega(u',v')\Omega(\theta,\omega)|\,\varphi_1(|\langle u'-\theta,\xi'\rangle|^{-1})\\&\qquad\times\varphi_2(|\langle v'-\omega',\eta'\rangle|^{-1})d\sigma(u')d\sigma(v')d\sigma(\theta)d\sigma(\omega)<\infty.\end{aligned}\tag{0.2.6}$$

容易知道对于 $\Omega\in L^1(S^{m-1}\times S^{n-1})$, 当 $\varphi_i(t) = (\log(a+t))^\alpha$ 时，条件 (0.1.6) 与 (0.2.5) 等价. 在第二部分，可知当 $m=n=2$ (0.2.5) 可推得 (0.2.6). 同时，我们建立如下命题：

命题 2.2.1　设 $m=n=2$, φ_i $(i=1,\,2)$ 正如 1 所述，且 $\Psi\in$